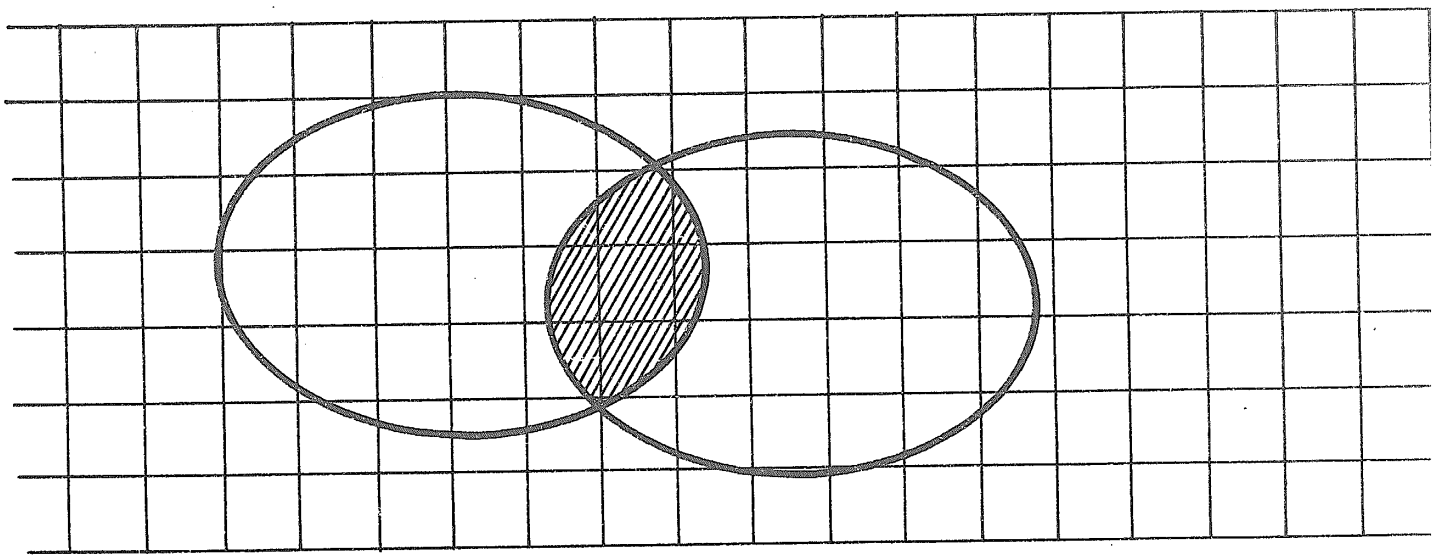
CONJUNTOS DE PUNTOS

Obras que integran el bloque 4 *(Geometría euclidiana):*

1. ***Conjuntos de puntos***
2. Relaciones binarias
3. Figuras planas
4. El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos
5. Polígonos convexos
6. Relación de semejanza
7. Geometría métrica en el plano
8. Cuerpos geométricos

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 4

Geometría euclidiana

Módulo 1
CONJUNTOS DE PUNTOS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
CONJUNTOS DE PUNTOS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1984
ISBN 968-24-1240-4

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

1.1 El método axiomático

1.2 Términos no definidos

1.3 Representación simbólica

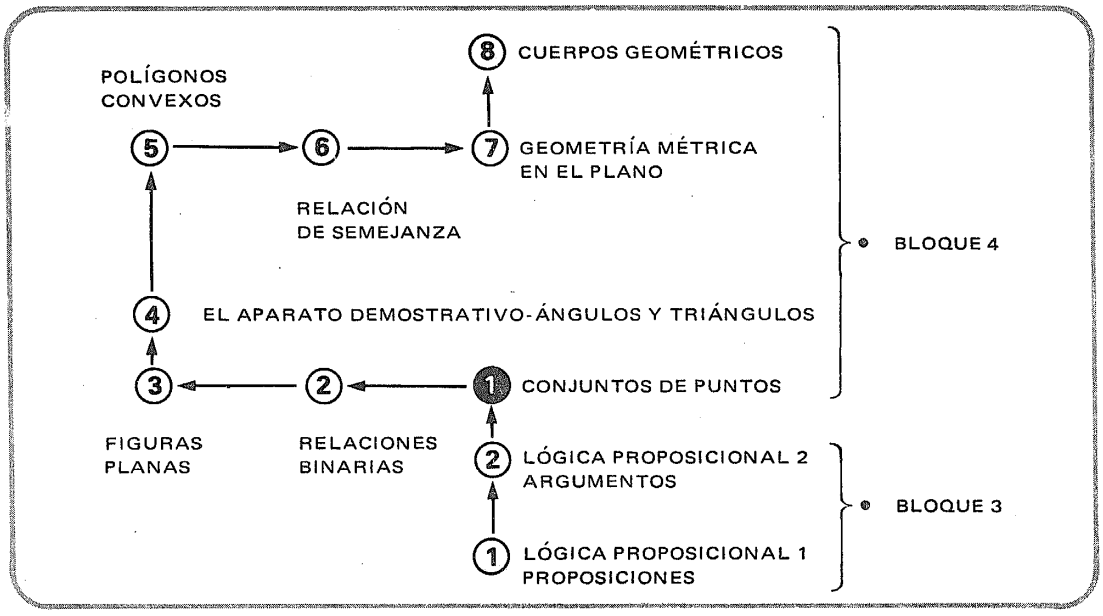
1.4 Subconjuntos de la recta

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 4. Geometría euclidiana

Objetivos: establecer algunos hechos geométricos relacionados con ciertos conjuntos de puntos y demostrar determinados teoremas a partir de un grupo dado de axiomas o postulados básicos, aplicando las reglas del juego de la lógica

Esquema estructural del bloque 4



Módulo 1. Conjuntos de puntos

Objetivos: establecer algunos conceptos geométricos básicos con la ayuda de las nociones de lógica matemática y de la teoría intuitiva de los conjuntos

Prerrequisitos:

	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Nociones de lógica matemática	3	1, 2

1.1

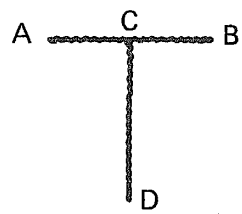
El método axiomático

1

En los ejercicios siguientes el estudiante dará su respuesta de acuerdo con lo que la observación de primera vista le indique.

2

De estos dos segmentos de recta, señalar el que nos parezca mayor.

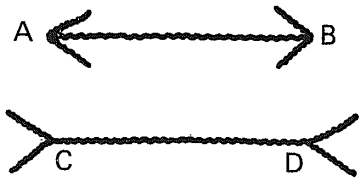


AB/CD

No se da respuesta.

3

Señalar
el segmento de recta
que nos parezca
mayor.

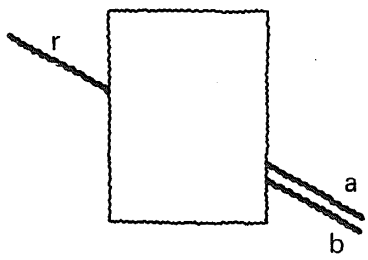


AB/CD

No se da respuesta.

4

Señalar la recta
que creamos que es
la prolongación de r.

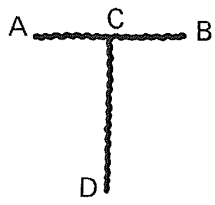


a/b

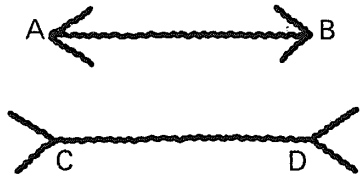
No se da respuesta.

5

Ahora bien,
si medimos cuidadosamente los
segmentos AB y CD nos damos cuenta
que tienen la misma longitud
(o cuando menos, aproximadamente
la misma longitud).



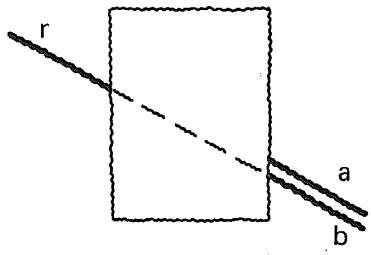
6



También podemos experimentalmente comprobar que los segmentos AB y CD de esta figura, tienen la misma longitud.

7

Contrariamente a lo que la vista parece indicarnos...



...la prolongación de r es b como podemos *experimentalmente* verificar.

8

Como vemos, el

sentido de la vista

puede resultar ineficaz para proporcionarnos una

información confiable

acerca de los objetos del mundo real.

9

En un estudio

formal

de la

Geometría

es necesario

demostrar

la verdad o falsedad
de las

proposiciones

que utilizamos.

10

Recordemos que:

proposición

es un enunciado
en el que
afirmamos o negamos algo.

11

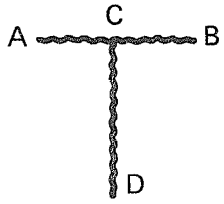
Ejemplos:

Afirmación:

"El segmento AB tiene la misma medida que el segmento CD".

Negación:

"El segmento AB no tiene la misma medida del segmento CD".



12

Recordemos también
que una

proposición

puede ser

verdadera
o
falsa.

13

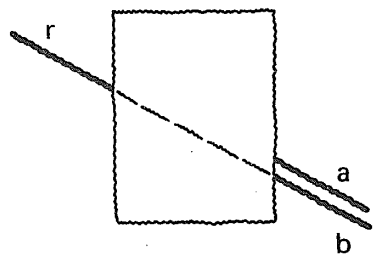
En forma

experimental

comprobamos
que la proposición

intuitivamente

formulada:
"a es la prolongación de r"
es falsa.



14

Consideraremos,
en este estudio de la Geometría,
ciertas proposiciones
cuya verdad aceptaremos
sin necesidad de demostración.

15

Les llamaremos:

Axiomas
o
Postulados.

16

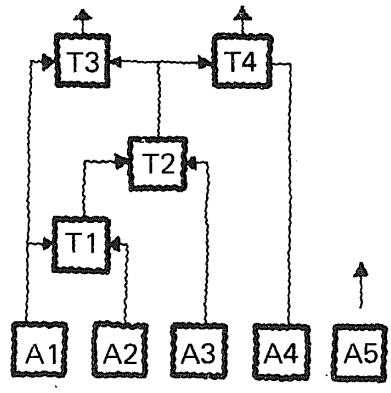
A partir de estas proposiciones
originales (los axiomas)
podremos *demostrar*
otras proposiciones
que llamaremos

Teoremas

utilizando las reglas del juego
de la Lógica.

17

Los teoremas
ya demostrados,
en combinación
con los axiomas,
nos permitirán
demostrar otros teoremas,
los que, a su vez,
servirán de base
para la demostración
de nuevos teoremas,
y así sucesivamente.



18

Entonces,

La verdad o falsedad

de los hechos geométricos

puede ser establecida
por alguno o algunos
de los siguientes medios:

19

1. Experimentación

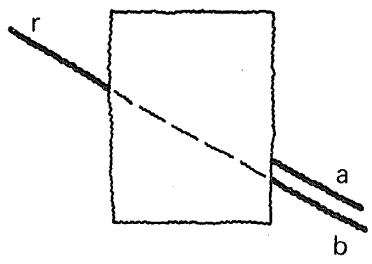
Cuando:

- medimos
- comparamos
- utilizamos modelos físicos

como en los casos presentados
a continuación.

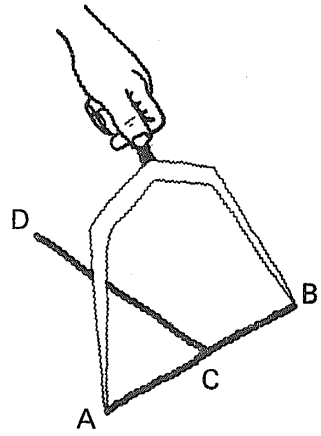
20

"b es la prolongación de r"



21

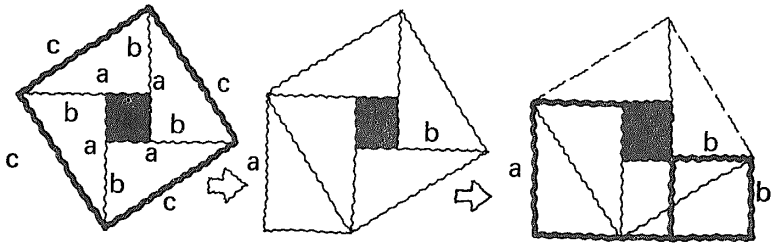
"El segmento AB tiene la misma longitud que el segmento CD".



22

Estudiar con antención
esta demostración experimental del
conocido teorema de Pitágoras:

$c^2 = a^2 + b^2$

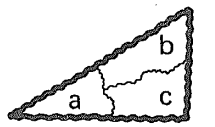


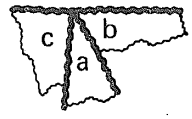
Área = c^2

Área = $a^2 + b^2$

23

Estudiar con atención:

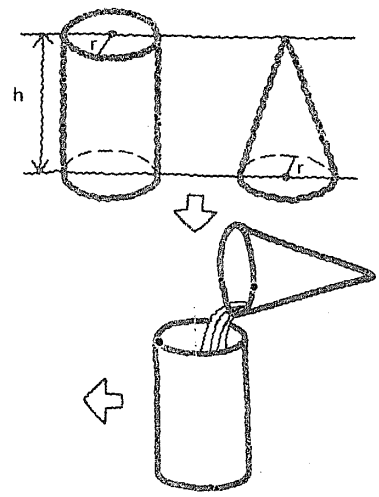




$\measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c = 180°$

24

Estudiar con atención:



"El volumen de un cono circular recto es igual a un tercio del volumen de un cilindro circular recto de la misma base y altura"

25

2. Intuición

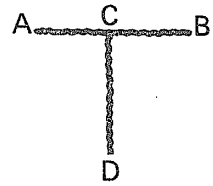
Cuando:

- percibimos de manera inmediata.

26

Por ejemplo:

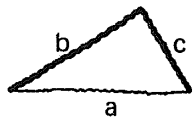
De la simple observación visual concluimos que:



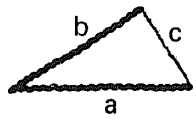
"CD tiene mayor longitud que AB".

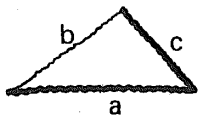
27

Nos parece obvio que:



"La suma de las medidas de dos lados de un triángulo cualquiera es mayor que la medida del tercer lado".

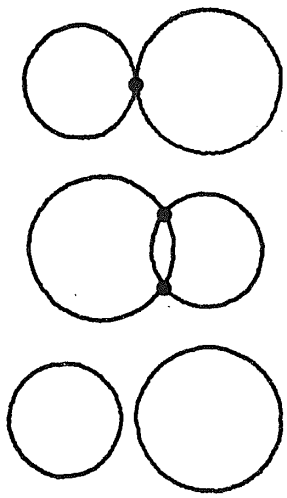




28

"Dos circunferencias distintas, en un plano, se intersecan:

- en un punto
- en dos puntos, o
- no se intersecan.



29

3. Razonamiento deductivo.

Cuando:

- demostramos la verdad de una proposición (teorema) a partir de otras proposiciones aceptadas como verdaderas (axiomas o postulados) y/o de otras proposiciones previamente demostradas, utilizando las reglas del juego de la Lógica

30

- La falta de exactitud de los resultados obtenidos **experimentalmente,** y
- la poca confiabilidad de los procesos **intuitivos**

ponen de manifiesto la importancia del

método deductivo de razonamiento

en el establecimiento de las verdades geométricas.

31

Se ha llamado

método axiomático

a esta forma de razonamiento en que se establece un cuerpo de afirmaciones básicas acerca de los conceptos, para deducir a partir de ellas, todas las demás proposiciones de la teoría.

4.1.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar*, haciendo uso de auxiliares visuales previamente elaborados, la importancia de los métodos deductivos de razonamiento en el establecimiento de las verdades geométricas.

1.2

Términos
no definidos

32

Al igual que en cualquier
otro sistema matemático,

se requiere

en Geometría,
hacer uso de un

lenguaje.

33

Necesitaremos, en este estudio,
de

términos

para designar a los diversos
"entes geométricos."

34

Pero,
así como requerimos de un

cuerpo de proposiciones elementales no demostradas

necesitamos de

un conjunto de términos no definidos

a partir de los cuales
podamos definir los demás.

35

Recordemos, por ejemplo,
que hemos iniciado
el estudio de los conjuntos
con

dos términos primarios

(no definidos):

- conjunto
  y
- elemento

36

Iniciaremos
el estudio de la Geometría
con

3 términos primarios (no definidos):

- **punto**
- **recta**
- **plano**

que designan a determinados
"entes geométricos".

37

- **punto**
- **recta**
- **plano**

Estos

conceptos

quedarán

sin definir,

pero podemos atribuirles
ciertas propiedades
y establecer ciertas relaciones
entre ellos.

38

Espacio

será el

conjunto universo

en Geometría.

Sus elementos son los

puntos.

39

Podemos decir que:

espacio

es un conjunto de _____ puntos.

De hecho,

espacio

es el conjunto de todos los _____ puntos.

40

Hemos "definido"

espacio

a partir de los términos primarios (no definidos):

- **conjunto**
  y
- **punto**

41

- Esta es una representación de un punto.
- No es un punto.
- Es demasiado grande para ser un punto.

42

- Esta es otra representación de un punto.
- También es demasiado grande para ser un punto.

43

Esto es también demasiado grande para ser un punto.

44

Esto sigue siendo demasiado grande para ser un punto.

45

- Un punto no tiene "dimensiones".*

*Confiamos en nuestra noción intuitiva de dimensión

46

Esperamos que

las anteriores explicaciones
nos hayan ayudado a formar la

noción intuitiva de punto.

47

En un estudio formal estricto
no nos interesaría interpretar al

punto

como
un objeto en el mundo físico.

Nos interesarían únicamente,
las

propiedades

que le son atribuidas.

48

Ahora bien,
existen en el espacio

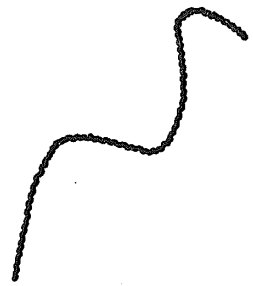
subconjuntos de puntos

a los que llamaremos
genéricamente

figuras geométricas.

49

Esta es la representación de una figura geométrica que designamos con el nombre de **línea.**



50

Una línea es un conjunto de ⌊_____⌋

puntos.

51

Aunque
la representemos así,
una línea
no tiene anchura.

52

Señalar la opción correcta.

Una línea
es un conjunto

finito/infinito

de puntos.

infinito

53

Podemos decir que un punto dado (P):

- pertenece a
- es un elemento de
  o
- está en

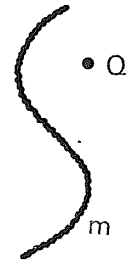
...una línea dada (l).

54

O bien,
un punto dado (Q):

- ⌊_____⌋
- ⌊_____⌋
  o
- ⌊_____⌋

...una línea dada (m).



no pertenece a...

no es un elemento de...

no está en...

55

Aquí tenemos
dos puntos que:

...la línea representada.

pertenecen a...

son elementos de...

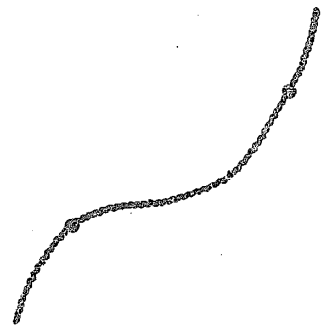
están en...

56

Atención:

¿pueden
existir otras líneas
que tengan como elementos
(que contengan)
a los dos puntos
representados?

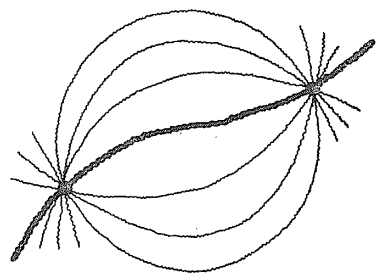
Sí / No



Sí.

57

¿Cuál es el número
máximo de líneas que
es posible trazar,
de modo que contengan
a los dos puntos indicados?



No hay un número
máximo de líneas
que podamos trazar
para satisfacer la
condición dada,

o bien,

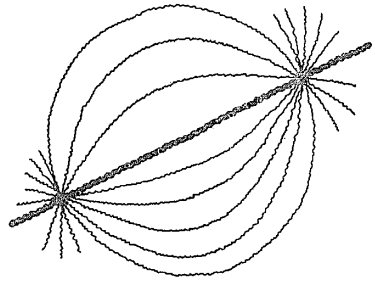
el **número** de líneas
que podemos
"hacer pasar" por
los dos puntos
dados es
infinitamente
grande.

58

Ahora bien,

existe una línea única
que contiene
a los dos puntos dados
y que llamamos

recta.



59

La proposición del cuadro anterior
ha sido establecida de manera intuitiva.

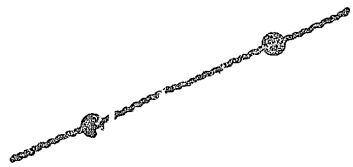
Vamos, ahora, a ponerla en la forma de un axioma
que enunciaremos así:

"Si P_1 y P_2 son puntos distintos cualesquiera
entonces existe una recta, y sólo una,
que contiene a P_1 y a P_2".

60

Una expresión equivalente:

"Dos puntos distintos
determinan una recta".

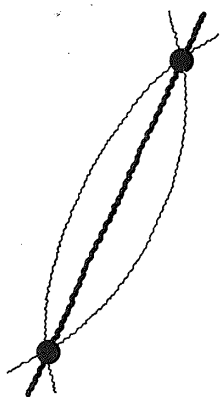


61

El axioma anterior
atribuye a la recta
la propiedad de

rectitud,

propiedad de que goza
una sola de las líneas
que contienen a
los dos puntos dados.

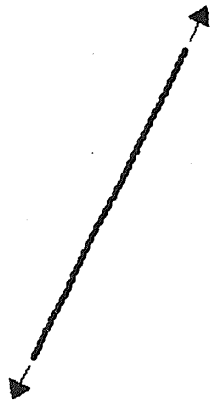


62

Debemos entender
que una recta

se extiende indefinidamente

en ambos sentidos.



63

Esta es la representación de
una recta,

pero es demasiado "ancha" y
demasiado "corta"
para ser una recta.

Una recta carece de anchura
y su longitud es infinita.

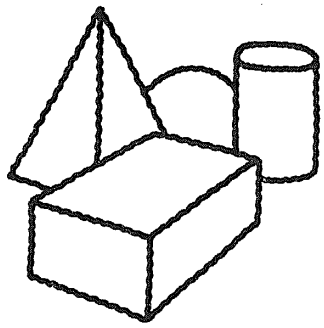
64

Existen, en el espacio,
subconjuntos de puntos
a los que daremos el nombre de:

cuerpos geométricos.

65

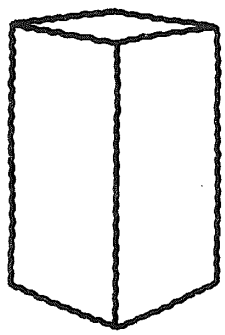
Un cuerpo geométrico
es un
conjunto de puntos.



66

Esta es
una representación de un

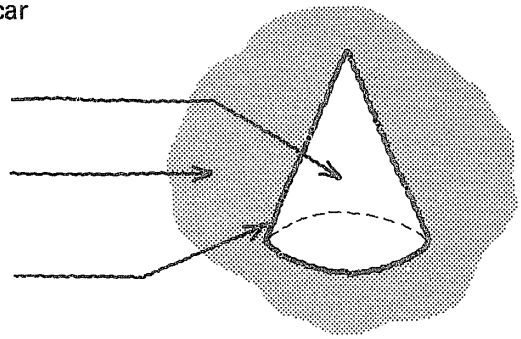
cuerpo geométrico.



67

En un cuerpo geométrico
podemos identificar
3 regiones:

- región interior
- región exterior
  y
- frontera.



68

Los puntos de la frontera
no pertenecen a la región interior
ni a la exterior.

69

Los puntos de la frontera
constituyen subconjuntos
a los que
llamamos

superficies.

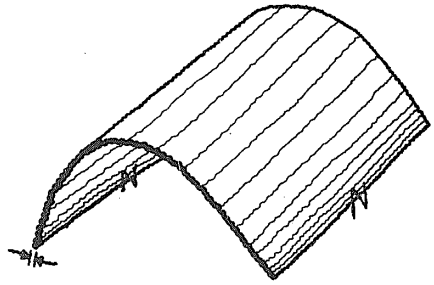
70

Esta es una representación
de una superficie.

No es una superficie.

El espesor es demasiado
grande para
ser una superficie.

Una superficie
"no tiene espesor".



71

He aquí la representación de un punto
contenido en una superficie.

Decimos que:

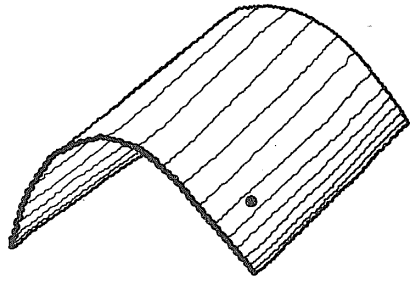
el punto:

- ____
- ____

o

- ____

...la superficie dada.



pertenece a...

es un elemento de...

está en...

72

Imaginemos,
ahora,

- tres puntos "no colineales"*
  en el espacio,
  y
- una superficie
  conteniéndolos a los tres.

*Es decir, tres puntos distintos que no pertenecen a la misma recta.

73

¿Qué número máximo
de superficies
conteniendo a los tres
puntos podemos imaginar?

Un número
infinito de
superficies.

74

No perdamos de vista
el papel
que la

intuición

está desempeñado aquí.

75

Ahora bien,
existe una superficie única
que contiene a los tres puntos
y que llamamos

plano.

76

Consideremos la proposición anterior como un

axioma,

y enunciémoslo en alguna de las siguientes formas:

"Si P_1, P_2 y P_3 son tres puntos no colineales, entonces hay un plano único que contiene a P_1, P_2 y P_3".

"Tres puntos no colineales pertenecen a un plano único".

"Es posible hacer pasar un plano, y sólo uno, por tres puntos dados no colineales".

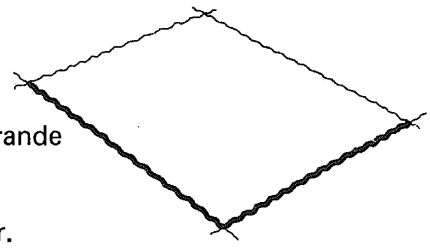
77

Otra expresión equivalente:

"Tres puntos no colineales *determinan* un plano único".

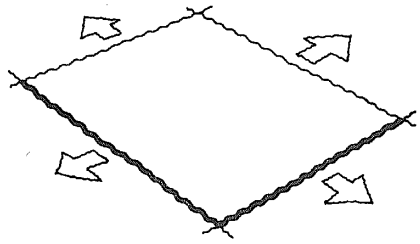
78

- Esta es una representación de un plano.
- No es un plano.
- Su espesor es demasiado grande para ser un plano.
- Un plano carece de espesor.



79

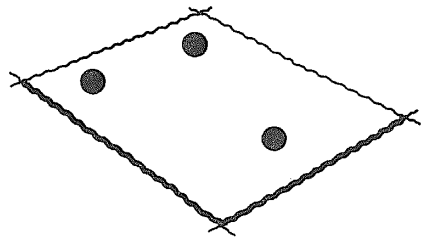
Debemos entender que
un plano se extiende
ilimitadamente en
todas direcciones,
aunque lo representemos
en forma limitada.



80

Repetimos.

Tres puntos no colineales
determinan
un plano único.



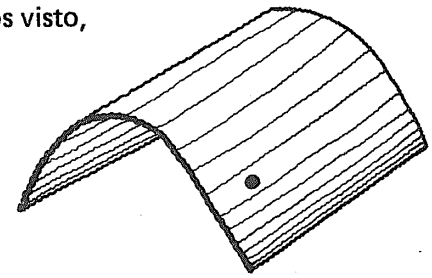
81

Consideremos
una superficie cualquiera
y un punto contenido en ella.

Podemos decir, según hemos visto,
que el punto representado:

- ⌊_____⌋
- ⌊_____⌋
  o
- ⌊_____⌋

...la superficie dada.



pertenece a...

es un elemento de...

está en...

82

Ahora,

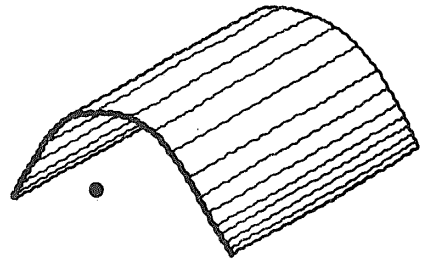
el punto representado

- _____
- _____

o

- _____

...la superficie dada.



no pertenece a...

no es un elemento de...

no está en...

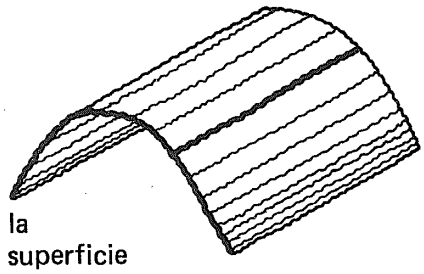
83

Decimos, también, que:

la recta aquí representada

- está incluida en
  o
- es un subconjunto de

} la superficie dada.

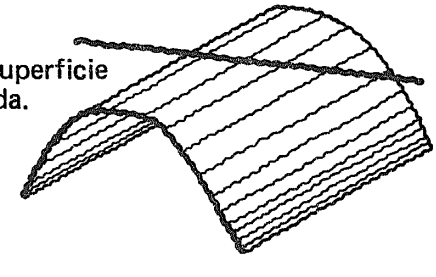


84

En cambio, esta recta:

- _____
  o
- _____

} la superficie dada.



no está incluida en

no es un subconjunto de

85

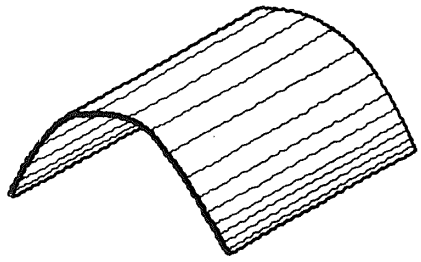
¡Atención!:

Dos puntos distintos cualesquiera,
pertenecientes a la
superficie representada
determinan una recta

incluida en

dicha superficie

V / F



F

ver cuadro siguiente.

86

Por ejemplo:
Los puntos
P_1, P_2, P_3 y
P_4 pertenecen
a la superficie

La recta que determinan P_1 y P_2

está incluida en

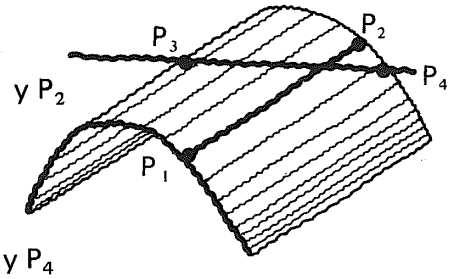
la superficie,

pero

la recta que determinan P_3 y P_4

no está incluida

en la superficie.



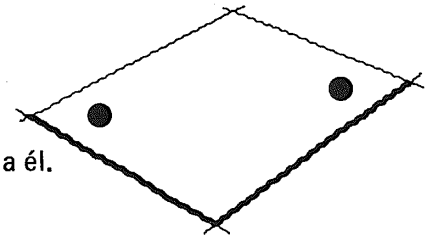
87

Si dos puntos distintos cualesquiera
pertenecen a una superficie,
entonces

la recta que determinan puede
estar incluida o no
en dicha superficie.

88

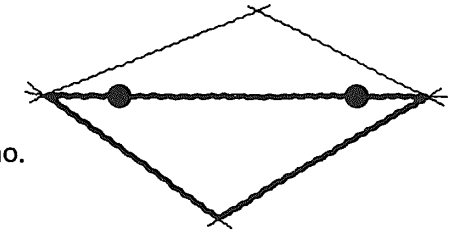
Ahora,
consideremos un plano
y dos puntos pertenecientes a él.



89

Si dos puntos distintos
cualesquiera
pertenecen a un plano,
entonces
la recta que determinan
está incluida en dicho plano.

V / F



V

90

Aceptemos esta proposición
como un axioma:

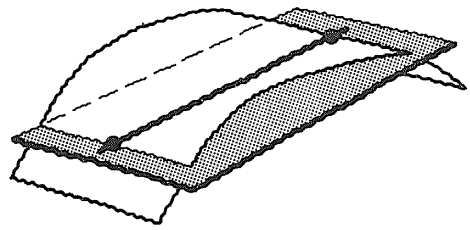
"La recta determinada por
dos puntos distintos pertenecientes
a un plano está incluida en dicho
plano".

91

Observemos que
el axioma anterior
da al plano
la propiedad de

"planitud" o "llaneza"

y le impide ser curvo.



92

Hasta aquí
hemos atribuido
a la recta y al plano
ciertas propiedades,
a través de nuestros
primeros tres axiomas.

93

Podemos definir
la **Geometría**
como:

el estudio del espacio
y sus subconjuntos.

Debemos tener presente que:

nuestro propósito es
familiarizarnos con un cierto número
de hechos geométricos
que nos serán de utilidad
en estudios posteriores,
más que construir
un sistema matemático sólido.

4.1.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *enumerar* los términos no definidos, en el presente estudio de la Geometría Euclidiana.
- *explicar* con sus propias palabras las nociones intuitivas de:

  — punto,
  — recta,
  — plano.

- *explicar* el significado de los siguientes **axiomas**:

  1. Dos puntos distintos determinan una recta única.
  2. Tres puntos no colineales determinan un plano único.
  3. La recta determinada por dos puntos distintos pertenecientes a un plano, está incluida en dicho plano.

1.3

Representación
simbólica

95

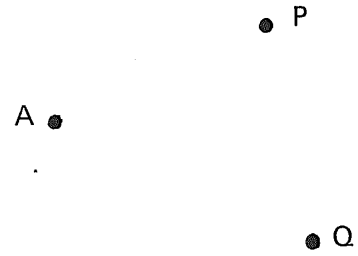
Utilizaremos

letras mayúsculas

para simbolizar
los puntos.

Hablamos de:

- el punto A.
- el punto P.
- el punto Q.



96

Podremos designar una

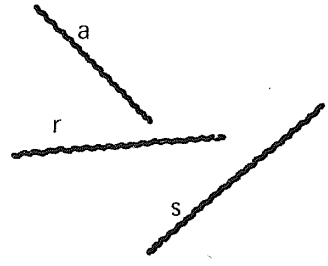
recta

utilizando

letras minúsculas.

Por ejemplo:

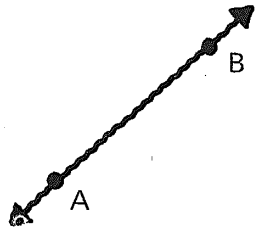
- la recta a
- la recta r
- la recta s.



97

Otra manera de designar una recta:

por medio de los puntos que la determinan.



98

El símbolo $\overleftrightarrow{AB}$

representa a

"la recta determinada por los puntos A y B"

La doble flecha sugiere el hecho de que la recta se extiende en ambos sentidos, más allá de los puntos A y B.

99

Utilizaremos

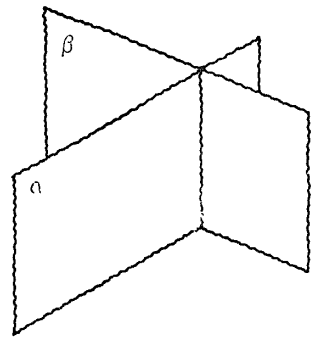
letras griegas

para designar a los

planos.

Por ejemplo:

- el plano α
- el plano β

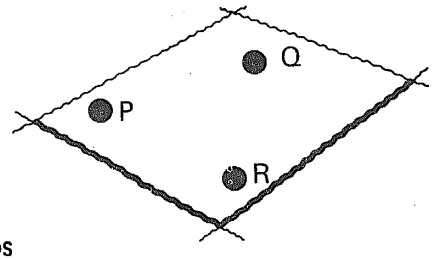


100

Podremos
usar
también
la notación:

$\overline{PQR}$

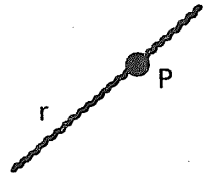
para designar
al plano determinado por los
puntos P, Q y R.



101

- El punto P { • pertenece a... • es un elemento de... o • está en... } la recta r.

Este hecho lo simbolizamos así:

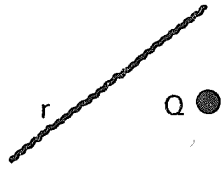


Recordemos la notación utilizada
en el estudio de los conjuntos.

$P \in r$

102

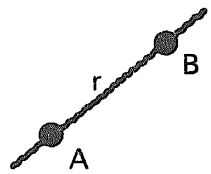
Representación
simbólica:



$Q \notin r$

103

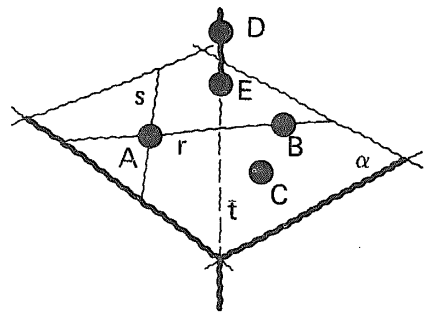
Representación simbólica:



$A \in r \wedge B \in r$
o bien
$A,B \in r$

104

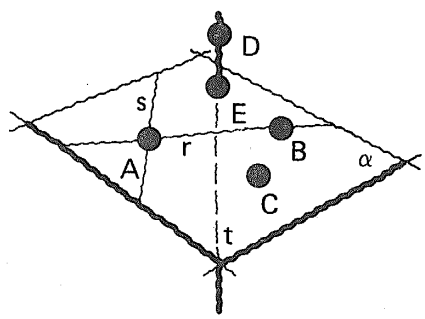
- $A \in \alpha$ V / F
- $A \in r$ V / F
- $A \notin s$ V / F
- $B \notin s$ V / F
- $C \in \alpha$ V / F



V
V
F
V
V

105

- $D \in \alpha$ V / F
- $A,B \in r$ V / F
- $A,B \in s$ V / F

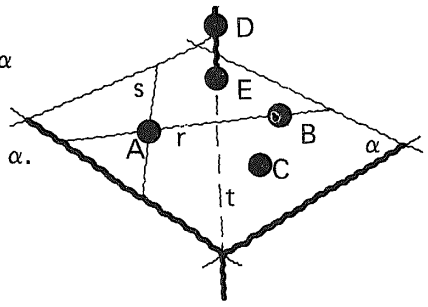


F
V
F

106

- r está estrictamente incluida en α
  o
- r es un subconjunto propio de α.

Simbólicamente:



$r \subset \alpha$

107

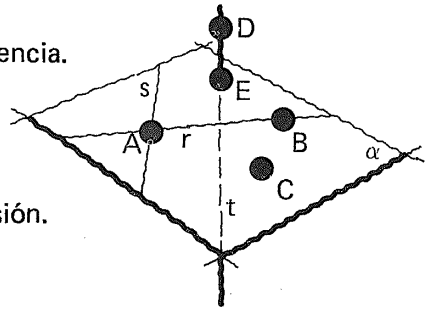
Observar con atención.

- $A \in r$
- $A \in \alpha$

} relación de pertenencia.

- $r \subset \alpha$
- $\{A\} \subset \alpha$

} relación de inclusión.

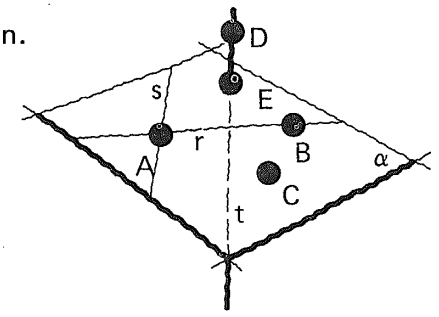


108

Observar con atención.

Expresiones como éstas deben considerarse **mal formadas:**

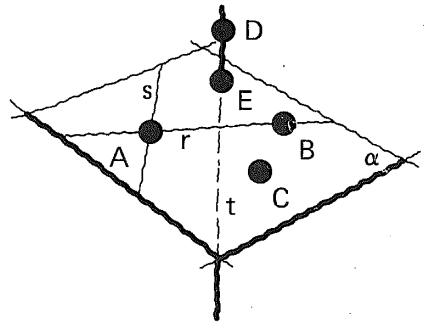
- $A \subset \alpha$
- $r \in \alpha$



109

Expresar las proposiciones siguientes en lenguaje común y señalar si son verdaderas o falsas.

- $s \subset \alpha$ V / F
- $t \not\subset \alpha$ V / F
- $E \in \alpha$ V / F
- $E \notin t$ V / F

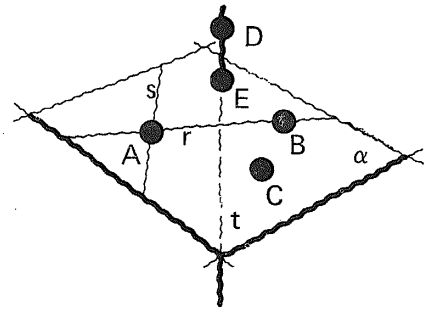


- "s está estrictamente incluida en α" V
- "t no está estrictamente incluida en α" V
- E pertenece a α V
- E no pertenece a t F

110

Señalar la opción correcta:

- $A \in s \wedge A \in r$ V / F
- $A \in r \wedge C \in r$ V / F
- $A \in r \wedge B \in r$ V / F

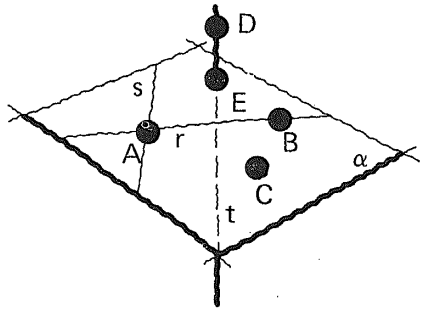


V
F
V

111

Señalar la opción correcta:

- $r \subset \alpha \wedge t \not\subset \alpha$ V / F
- $r \subset \alpha \wedge C \in \alpha$ V / F
- $E \in \alpha \wedge E \in t$ V / F

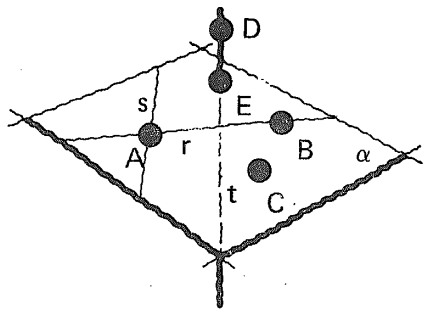


V
V
V

112

Señalar la opción correcta.

- $B \in r \vee B \in s$ V / F
- $A \in r \vee A \in s$ V/ F
- $C \in r \vee C \in s$ V / F



V

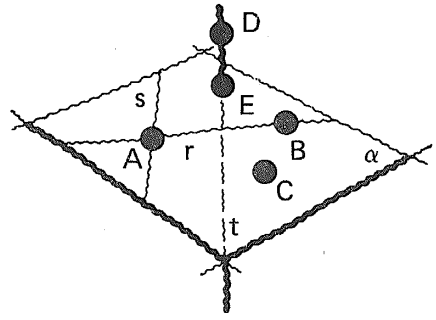
V

F

113

$(B \in r \wedge r \subset \alpha) \Rightarrow B \in \alpha$

Esta expresión,
la leemos así:

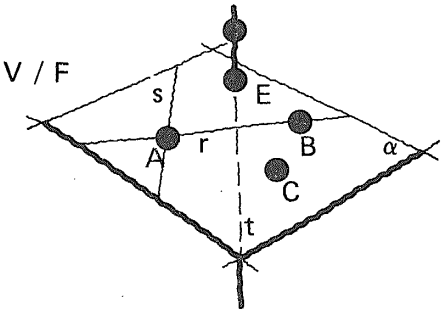


Si el punto B
pertenece a la recta r
y la recta r está
estrictamente
incluida en el
plano α
entonces el punto
B pertenece al
plano α.

114

Señalar la opción correcta.

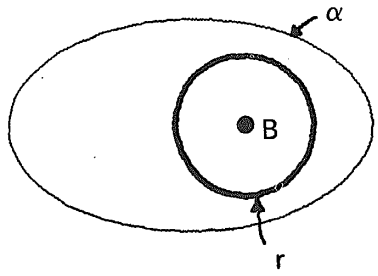
- $(B \in r \wedge r \subset \alpha) \Rightarrow B \in \alpha$ V / F



V

115

Un diagrama de Venn
nos permite ver
con más claridad
la situación anterior.



4.1.3.1

Práctica adicional
si se
considera necesario.

116

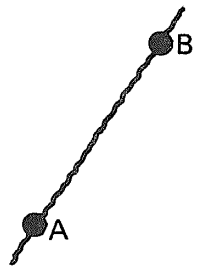
Consideremos esta proposición
que hemos establecido como

Axioma 1:

Dos puntos distintos pertenecen
a una recta única.

117

"Dos puntos distintos pertenecen a una recta única".



Una proposición condicional equivalente:

si [_____]

entonces [_____]

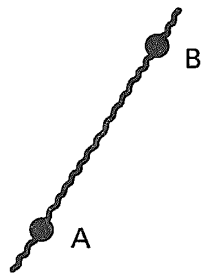
A y B son puntos distintos

pertenecen a (o determinan) una recta única.

118

Simbólicamente

[_____] ⇒ [_____]



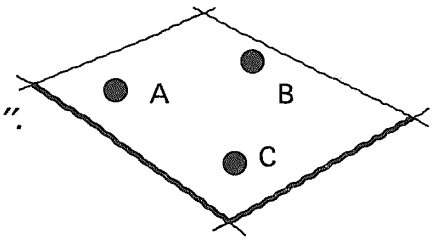
Por ejemplo:

$A \neq B \Rightarrow \overleftrightarrow{AB}$ es única.

119

Consideremos el **Axioma 2.**

"Tres puntos no colineales pertenecen a un plano único".



Una proposición condicional equivalente:

si [_____]

entonces [_____]

Por ejemplo:

tres puntos son colineales

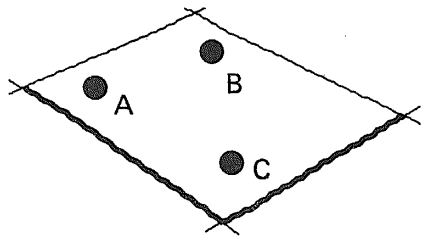
pertenecen a un plano único,

o bien

Si *A, B y C son puntos no colineales*
entonces *el plano ABC es único.*

120

Si A, B y C son puntos no colineales, entonces el plano ABC es único.



Expresión simbólica equivalente:

Por ejemplo:

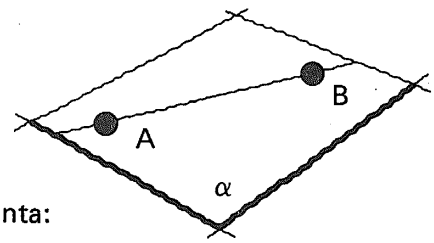
A, B y C son puntos no colineales
$\Rightarrow \overline{ABC}$ es único.

121

Consideremos el **Axioma 3.**

"Si dos puntos distintos pertenecen a un plano, entonces la recta que determinan está incluida en dicho plano".

Escribamos una expresión simbólica equivalente, con relación a la figura adjunta:



$(A,B \in \alpha \wedge A \neq B)$
$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$

4.1.3.2

Práctica adicional, si se considera necesario.

4.1.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *representar* simbólicamente:

  — un punto,
  — una recta,
  — un plano.

- *señalar* la verdad o falsedad de relaciones de pertenencia o inclusión entre conjuntos dados de puntos.

- *representar* simbólicamente:

  proposiciones conjuntivas, disyuntivas, condicionales o bicondicionales, relacionando proposiciones simples de pertenencia e inclusión entre conjuntos de puntos.

- *expresar* un enunciado verbal dado, como una proposición condicional de la forma $P \Rightarrow Q$, o bicondicional de la forma $P \Leftrightarrow Q$.

1.4

Subconjuntos de la recta

122

Echemos un vistazo
a las operaciones de intersección, unión y diferencia
de conjuntos
para establecer algunos hechos geométricos
relacionados con
la recta y sus subconjuntos.

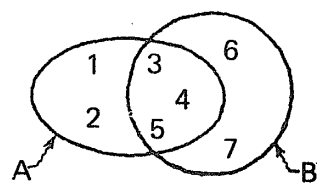
123

Recordemos que:

si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{3, 4, 5\}$

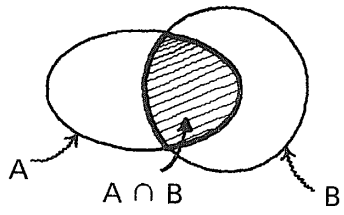
Gráficamente: ⇨



124

En general:

$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

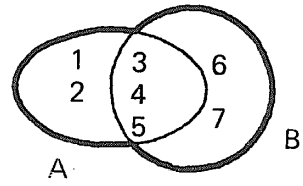


125

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

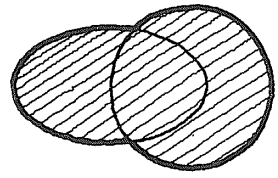
Gráficamente: ⇨



126

En general:

$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$



127

Si A = $\{1,2,3,4,5,\}$

y B = $\{3,4,5,6,7,\}$

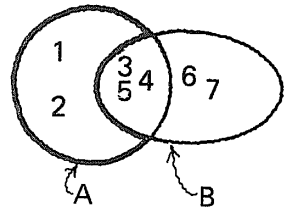
A−B = $\{1,2\}$

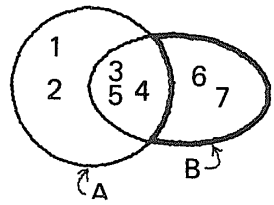
B−A = $\{6,7\}$

A−B ≠ B−A

Gráficamente ⇨

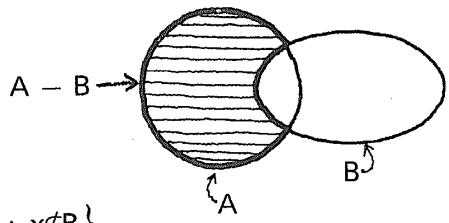
A−B





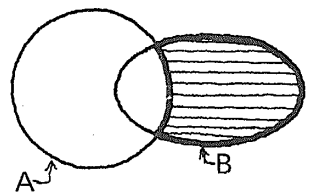
B − A

128



En general:

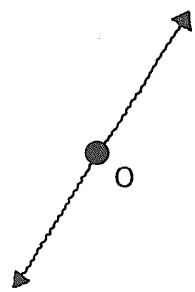
- A−B = $\{x|x\in A \wedge x\notin B\}$
- B−A = $\{x|x\in B \wedge x\notin A\}$



B − A

129

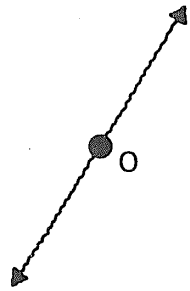
Ahora,
consideremos una recta
y un punto (O)
perteneciente a ella.



130

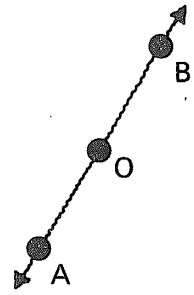
El punto O
divide a la recta
en dos conjuntos disjuntos
que llamaremos:

semirrectas



131

Consideremos, ahora,
un punto perteneciente
a cada una
de las semirrectas.



132

A esta porción de la recta

le llamaremos

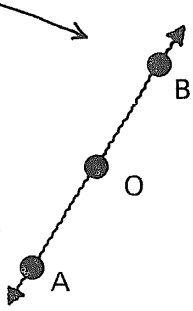
semirrecta OB

y la simbolizaremos así: $\overrightarrow{OB}$

A este porción de la recta
le llamaremos

semirrecta OA

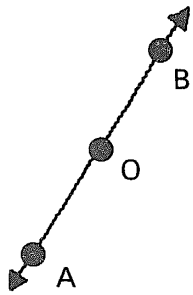
y la simbolizaremos así: $\overrightarrow{OA}$



133

Debemos observar que:

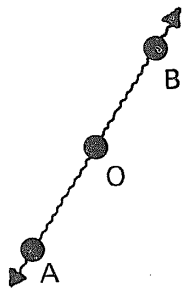
$O \notin \overrightarrow{OA}$
y
$O \notin \overrightarrow{OB}$



134

A dos semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$,
tales que
A, O y B son colineales
les llamaremos:

semirrectas opuestas.

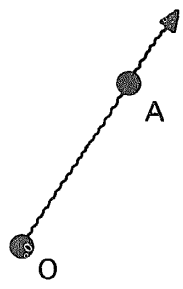


135

A la unión de la *semirrecta OA*
y el *punto O*
le llamaremos:

rayo OA

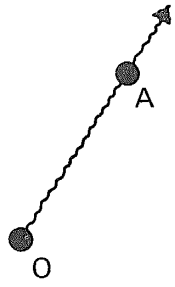
y lo simbolizaremos así:
$\overrightarrow{OA}$



136

Simbólicamente, de acuerdo con la definición anterior:

$\overrightarrow{OA} =$ ⌊_____⌋

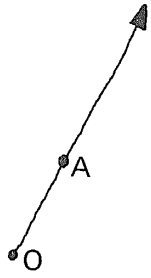


$\overrightarrow{OA} \cup \{O\}$

137

No olvidemos que el rayo $\overleftrightarrow{OA}$ es la unión de la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ y el punto O. Simbólicamente:

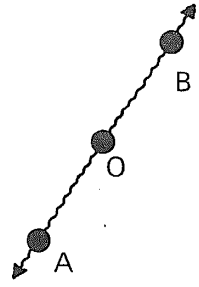
$\overleftrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} \cup \{O\}$



138

A dos rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ tales que A, O y B son colineales les llamaremos:

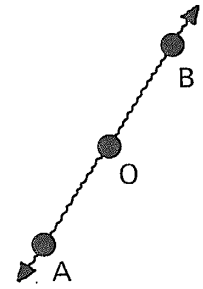
rayos opuestos



139

Escribir los signos $\in$ o $\notin$ para formar proposiciones verdaderas.

- O ⌴ $\overleftrightarrow{OB}$
- O ⌴ $\overrightarrow{OA}$
- O ⌴ $\overrightarrow{OB}$
- O ⌴ $\overleftrightarrow{OA}$



$\in$

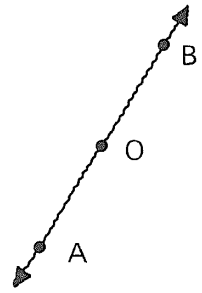
$\notin$

$\notin$

$\in$

140

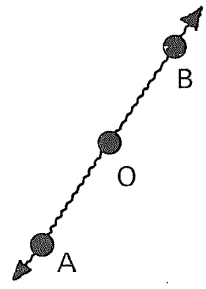
Al punto O
le llamaremos
origen
de los
rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$.



141

Señalar la opción correcta.

- $A \in \overrightarrow{OA}$ V / F
- $O \in \overrightarrow{OA}$ V / F
- $O \in \overleftrightarrow{OB}$ V / F



V

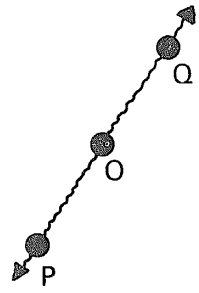
F

V

142

Señalar la opción correcta.

- $\overrightarrow{OP} \cup \overrightarrow{OQ} = \overleftrightarrow{PQ}$ V / F
- $\overrightarrow{OP} \cup \overrightarrow{OQ} = \overleftrightarrow{PQ}$ V / F
- $\overrightarrow{OP} \cup \overrightarrow{OQ} = \overleftrightarrow{PQ}$ V / F
- $\overrightarrow{OP} \cup \overrightarrow{OQ} = \overleftrightarrow{PQ}$ V / F



V

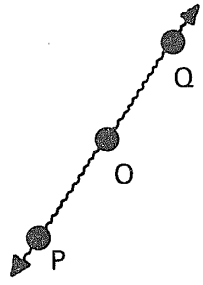
F

V

V

143

- $\overrightarrow{OP} \cap \overrightarrow{OQ} =$ ⌊_____⌋
- $\overrightarrow{OP} \cap \overrightarrow{OQ} =$ ⌊_____⌋
- $\overrightarrow{OP} \cap \overrightarrow{OQ} =$ ⌊_____⌋
- $\overrightarrow{OP} \cap \overrightarrow{OQ} =$ ⌊_____⌋



$\{O\}$

ϕ

ϕ

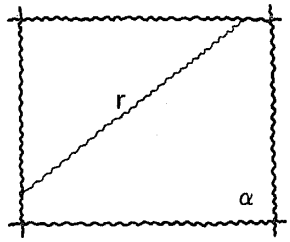
ϕ

4.1.4.1

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

144

Consideremos, ahora,
un *plano* (α)
y una recta (r)
incluida en él.

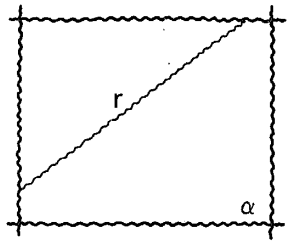


145

La recta r
divide al plano α
en dos conjuntos disjuntos
a los que llamaremos

semiplanos

A la recta r le llamaremos
frontera.



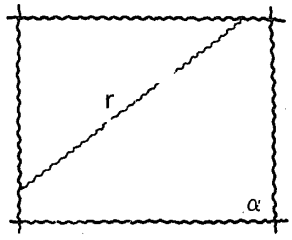
146

Si el semiplano
no contiene a r
le llamaremos:

semiplano abierto

y si contiene a r
le llamaremos:

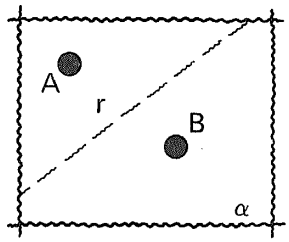
semiplano cerrado



147

El símbolo: $S_p(r, A)$
representará al **semiplano abierto** cuya frontera es r y que contiene al punto A.

Similarmente,
el símbolo: $S_p(r, B)$
representará a:



La línea punteada indica que la recta r no pertenece a ninguno de los semiplanos.

el semiplano abierto cuya frontera es r y que contiene a B.

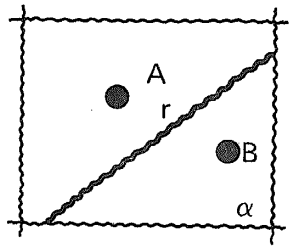
148

Simbolizaremos así:

$S_p[r, A)$

al **semiplano cerrado** cuya frontera es r y que contiene a A; y por lo tanto, así:

al semiplano cerrado cuya frontera es r y que contiene a B.



$S_p[r, B)$

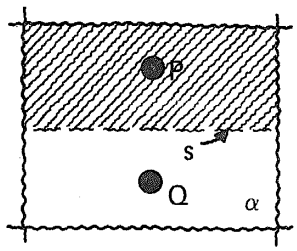
149

De acuerdo con lo anterior,

- el semiplano sombreado quedará simbolizado así:

S_p

- y el semiplano no sombreado, así:



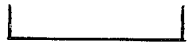
(s, P)

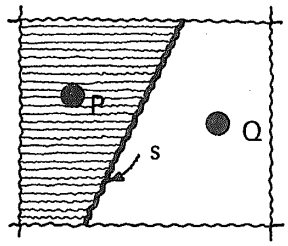
$S_p(s, Q)$

150

- Símbolo para el semiplano sombreado:

- Símbolo para el semiplano no sombreado:





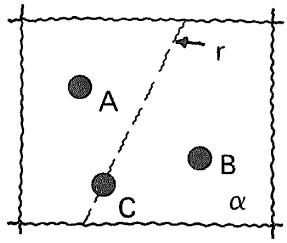
$S_p[s, P)$

$S_p[s, Q)$

151

Señalar la opción correcta.

- $A \in S_p(r, A)$ V / F
- $B \in S_p(r, A)$ V / F
- $C \in S_p(r, A)$ V / F



V

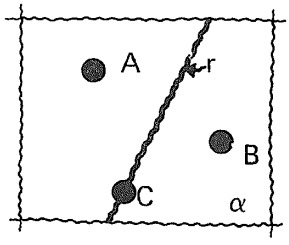
F

F

152

Señalar la opción correcta.

- $A \in S_p[r, A)$ V / F
- $B \in S_p[r, B)$ V / F
- $C \in S_p[r, B)$ V / F
- $C \in S_p[r, A)$ V / F



V

V

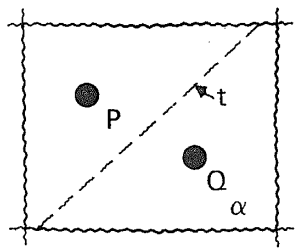
V

V

153

Señalar la opción correcta.

- $t \subset S_p(t, P)$ V / F
- $t \subset S_p(t, Q)$ V / F



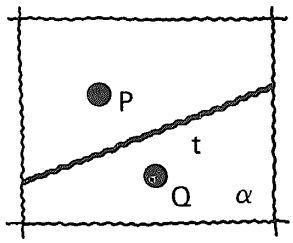
F

F

154

Señalar la opción correcta.

- $t \subset S_p[t,P)$
- $t \subset S_p[t, Q)$



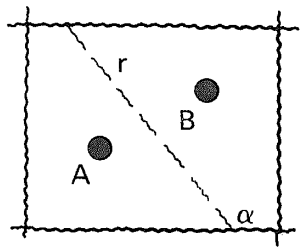
V

V

155

Señalar la opción correcta.

- $S_p(r, A) \cup S_p(r, B) = \alpha$ V / F
- $S_p(r, A) \cup S_p(r, B) \cup r = \alpha$ V / F



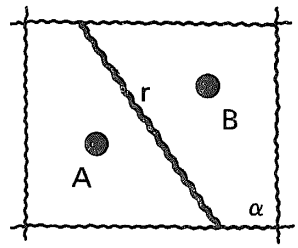
F

V

156

Señalar la opción correcta:

- $S_p[r, A) \cup S_p[r, B) = \alpha$
- $S_p[r, A) \cup S_p[r, B) \cup r = \alpha$

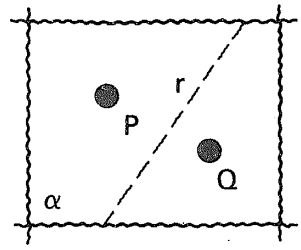


V

V

157

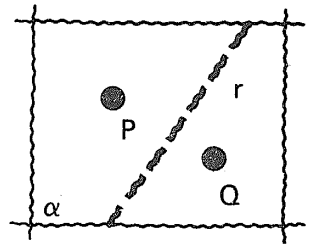
- $S_p(r, P) \cap S_p(r, Q) =$ _____



ϕ

158

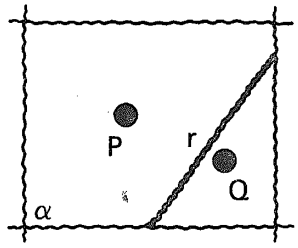
- $\alpha - S_p(r, Q) =$ _____



$S_p[r, P)$

159

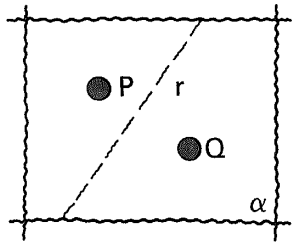
- $S_p[r, P) \cap S_p[r, Q) =$ ⌊———



r

160

- $\alpha - [S_p(r, P) \cup S_p(r, Q)]$



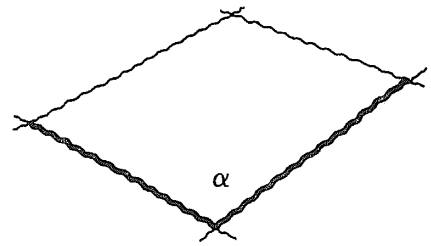
r

4.1.4.2

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

161

De manera similar
a la estudiada,
un plano α
divide al espacio E
en dos conjuntos
que llamaríamos:



_____

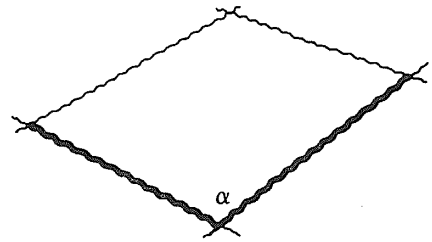
semiespacios

162

El plano α
sería la

_____

entre los dos
semiespacios.



frontera

163

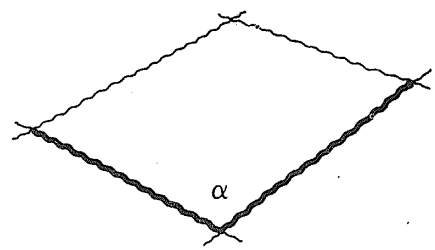
Podríamos hablar de
semiespacios

_____

o

_____

según contuvieran
o no a la
frontera α.



cerrados

abiertos

164

Un semiespacio abierto de frontera α
y conteniendo a un punto dado P,
podría ser simbolizado en esta forma:

$S_e(\alpha, P)$

165

Un símbolo para representar un
semiespacio cerrado de frontera α
y conteniendo a un punto P
podría ser este:

$S_e[\alpha, P)$

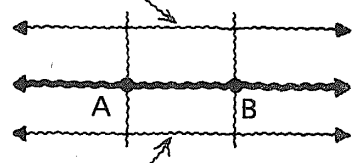
4.1.4.3

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

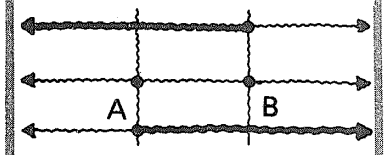
166

En la recta $\overleftrightarrow{AB}$ aquí representada, podemos identificar dos rayos: $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Señalar en la figura con trazo grueso la porción correspondiente a $\overrightarrow{BA}$.

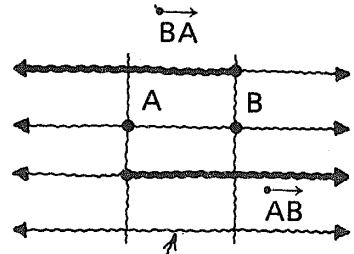


Señalar con trazo grueso la porción correspondiente a $\overrightarrow{AB}$.



167

Atención



Señalar con trazo grueso, la porción correspondiente a:

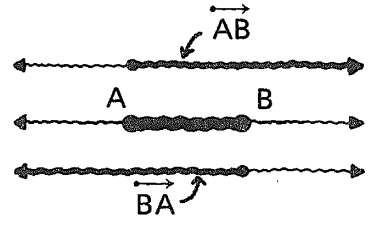
$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$

168

Llamaremos

segmento AB

a la porción de recta correspondiente a $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.



169

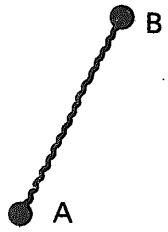
Los puntos A y B
serán los

extremos

del segmento AB.

170

Usaremos el símbolo $\overleftrightarrow{AB}$
para representar al segmento
cuyos extremos
son los puntos A y B.



171

Entonces, por definición:

$\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$

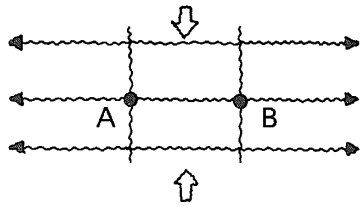
Podemos observar que:

$A, B \in \overleftrightarrow{AB}$

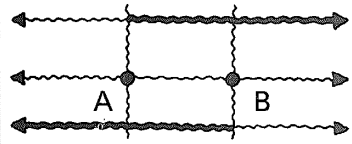
172

De manera similar podemos hablar de la intersección de dos semirrectas.

Señalar con trazo grueso la porción correspondiente a $\vec{AB}$.



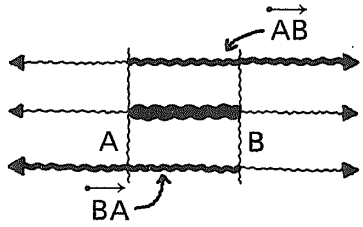
Señalar con trazo grueso la porción correspondiente a $\vec{BA}$.



173

He aquí la intersección de las semirrectas $\vec{AB}$ y $\vec{BA}$ que simbolizaremos así:

$\overline{AB} = \vec{AB} \cap \vec{BA}$



174

Daremos el nombre de:

segmento abierto

al definido así:

$\overline{AB} = \vec{AB} \cap \vec{BA}$

En este caso:

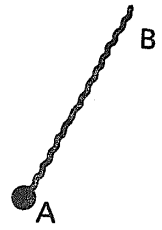
$A, B \notin \overline{AB}$

175

Nada nos impide definir un

segmento semiabierto.

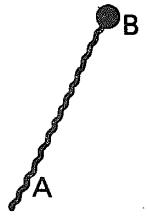
$\overleftarrow{AB} =$ ⌊_____⌋



$\overleftrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$

176

$\overrightarrow{AB} =$ ⌊_____⌋



$\overrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BA}$

177

Resumiendo:

- Segmento cerrado: (intersección de dos rayos opuestos) $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BA}$ Se verifica: $A, B \in \overleftrightarrow{AB}$.
- Segmento abierto: (intersección de dos semirrectas opuestas) $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ Se verifica: $A, B \notin \overline{AB}$.
- Segmentos semiabiertos (o semicerrados): (intersección de un rayo y una semirrecta)
  - $\overleftarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ Se verifica: $A \in \overleftarrow{AB} \wedge B \notin \overleftarrow{AB}$.
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BA}$ Se verifica: $A \notin \overrightarrow{AB} \wedge B \in \overrightarrow{AB}$.

178

Si A = B
se define un

"segmento nulo"

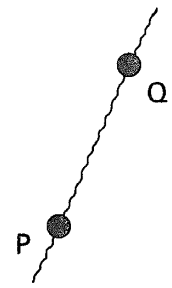
que simbolizaremos así: $\overrightarrow{AA}$

o así: $\overline{AA}$.

179

Señalar la opción correcta.

- $\overrightarrow{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ}$ V / F
- $\overline{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ}$ V / F
- $\overrightarrow{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ}$ V / F
- $\overrightarrow{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ}$ V / F

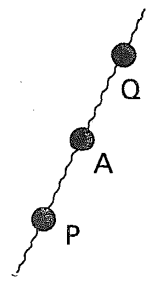


V
V
V
V

180

Señalar la opción correcta.

- $P \in \overrightarrow{PQ}$ V / F
- $P \in \overrightarrow{PQ}$ V / F
- $P \in \overrightarrow{PQ}$ V / F
- $P \in \overline{PQ}$ V / F

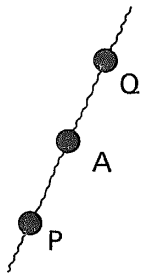


V
V
F
F

181

Señalar la opción correcta.

- $A \in \overleftrightarrow{PQ}$ V / F
- $A \in \overrightarrow{PQ}$ V / F
- $A \in \overleftarrow{PQ}$ V / F
- $A \in \overline{PQ}$ V / F

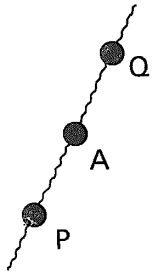


V
V
V
V

182

Señalar la opción correcta.

- $\overleftrightarrow{PA} \subset \overleftrightarrow{PQ}$ V / F
- $\overleftrightarrow{AQ} \subset \overleftrightarrow{PQ}$ V / F
- $\overleftrightarrow{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ}$ V / F

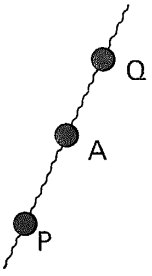


V
V
F*

*Hemos convenido en que $\subset$ significa "está estrictamente incluido en", o "es un subconjunto propio de".

183

$\overleftrightarrow{PQ} \subseteq \overleftrightarrow{PQ}$ V / F



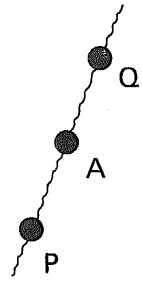
V*

*De acuero con lo convenido, $\subseteq$ significa:

"está incluido en", o "es un subconjunto de".

184

- $\overleftrightarrow{PA} \cap \overleftrightarrow{AQ} =$ ⌊_____⌋
- $\overline{PA} \cap \overline{AQ} =$ ⌊_____⌋

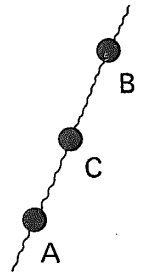


$\{A\}$

ϕ

185

- $\overleftrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BA} =$ ⌊_____⌋
- $\overleftrightarrow{BA} \cap \overleftrightarrow{BA} =$ ⌊_____⌋

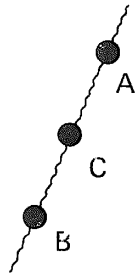


$\overrightarrow{BA}$

$\overleftrightarrow{BA}$

186

- $\overleftrightarrow{AC} \cup \overleftrightarrow{CB} =$ ⌊_____⌋
- $\overline{AC} \cup \overline{CB} =$ ⌊_____⌋

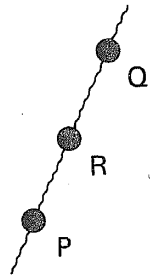


$\overleftrightarrow{AB}$

$\overline{AB} - \{C\}$

187

- $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} =$ ⌊_____⌋
- $\overrightarrow{PQ} - \overline{PR} =$ ⌊_____⌋



$\overrightarrow{RQ}$

$\{P\} \cup \overrightarrow{RQ}$

4.1.4.3

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

188

Hemos seleccionado 3 conceptos no definidos denotados por los términos:

- punto
- recta
- plano.

A partir de ellos, hemos definido otros conceptos derivados, tales como: espacio, geometría, semirrecta, rayo, segmento.

Hemos establecido 3 axiomas que atribuyen ciertas propiedades a los "entes no definidos".

4.1.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *recordar* las operaciones conjuntistas de intersección, unión y diferencia.
- *aplicar* los conceptos de intersección, unión y diferencia de conjuntos a la definición de los conceptos siguientes:

  — semirrecta,
  — rayo,
  — semiplano,
  — semiespacio,
  — segmento.

- *efectuar* operaciones de intersección, unión y diferencia con subconjuntos de una recta dada.
- *señalar* la verdad o falsedad de proposiciones que indican relaciones de pertenencia o inclusión con elementos o subconjuntos de una recta dada.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 10 de mayo de 1984,
en los talleres de Impresora Lorenzana, S. A.,
Cafetal núm. 661, Col. Granjas México,
se encuadernó en Servicios Editoriales Profesionales, S. A.,
Av. 5 de Mayo núm. 495, Col. Merced Gómez,
Deleg. Álvaro Obregón, 01600, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO EV KC 100